مجلة قاريونس العلمية

تُعنى بمُختلف فُروع المعرفة الإنسانية والتطبيقية
تصدرُ باللغة العربية

1999

منشورات جامعة قاريونس
بنغـــازي

السنة الثانية عشر
العدد الأول والثاني

السنة الثانية عشر

1999 ف

العدد الأول والثانى - مجلة قاريونس العلمية

المحتويات

نوعان من الدوال الخطية على جبر بناخ

د. عبد الله خليفة سعيد علي

نوعان من الدوال الخطية على جبر بناخ

مقدمــــــــة

فــي هــذا البحــث نقــدم نوعيــن مــن الدوال الخطية على جبر بــناخ *Banach algebra A* الدالــة الأولــى تســمى **الدالة المميزة** *character mapping* و الدالة الثانية تسمى **الدالة المقدرة** *evaluation mapping* .

ســوف نستعرض بعضا من خواص هذه الدوال في مجال جبر البناخ مع التطرق إلى بعض المفاهيم و النتائج الأساسية حول هاتين الدالتين.

هدفنا في هذا البحث و تطوير و تنمية بعضا من خواص هذه الدوال.

نقدم النوع الأول من الدوال الخطية على جبر بناخ.

تعريف 1

نفــرض أن لديــنا جبر بناخ A بالوحدة e. الدالة الخطية $\phi : A \to \mathbb{C}$ تسمى **دالة مميزة** إذا كانت $\phi(a) \neq 0$ لبعض $a \in A$ و كانت

$$\phi(ab) = \phi(a)\,\phi(a) \quad (a,b \in A).$$

فمثلا ، على جبر بناخ $C^1[0,1]$. نعرف الدالة ϕ كالآتي

$$\phi(f) = f(x) \quad (f \in C^1[0,1]).$$

فان ϕ تكون دالة مميزة على $C^1[0,1]$.

النظرية التالية تعطينا مفهوم موسع للدوال المميزة على جبر بناخ A .

نظرية 2 [2]

نفــرض أن لديــنا جبر بناخ التبديلي المركب A بالوحدة e . فانه توجد على الأقل دالة مميزة واحدة على A .

فــي الــنظرية الآتية سوف نستعرض نصوص الخصائص الأساسية للدوال المميزة .

نظرية 3

نفرض أن لدينا جبر بناخ A بالوحدة e. وبفرض أن ϕ دالة مميزة على A. فان

$$\text{(i)} \quad \phi(e) = 1$$

$$\text{(ii)} \quad \phi(\lambda) = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

$$\text{(iii)} \quad \phi(x^n) = (\phi(x))^n \quad (n \geq 1). \square$$

نظرية 4 [3]

نفــرض أن لديــنا جبر بناخ A بالوحدة e. ، وبفرض أن ϕ دالة مميزة على A. فان ϕ تكون دالة مستمرة وان $\|\phi\| = 1$.

تعريف 5

نفــرض أن لديــنا جبر بناخ A بالوحدة e. وبفرض أن ϕ دالة مميزة على A . العنصر $f \in A$ يسمى **عنصر معكوس** إذا وجد عنصر أخر $g \in A$ بحيث كان

$$fg = gf = e.$$

نظرية 6

نفــرض أن لدينا جبر بناخ A بالوحدة e. بفرض أن $f \in A$ عنصر معكوس، وبفرض أن ϕ دالة مميزة على A . فان

(i) $\phi(f^{-1}) = (\phi(f))^{-1}$

(ii) $\phi((fg)^{-1}) = \phi(g)^{-1}\phi(f)^{-1} \quad (f, g \in A)$.

البرهان

(i) بفرض أن $f \in A$ يكون عنصر معكوس .

فانه يوجد $g \in A$ بحيث أن :

$$fg = e.$$

أي أن ، $g = f^{-1}$.

فان

$$\phi(f f^{-1}) = \phi(e)$$

$$\phi(f)\phi(f^{-1}) = 1$$

لهذا

$$\phi(f^{-1}) = (\phi(f))^{-1}.$$

(ii) بفرض $f, g \in A$. فان

$$\phi((fg)^{-1}) = \phi(g^{-1} f^{-1})$$

$$= \phi(g^{-1})\,\phi(f^{-1})$$

$$= \phi(g)^{-1}\,\phi(f)^{-1} \qquad (\text{من } (i))$$

لذلك

$$\phi((fg)^{-1}) = \phi(g)^{-1}\,\phi(f)^{-1}.\ \square$$

نظرية 7

نفــرض أن لديــنا جبر بناخ A بالوحدة e. إذا وجدت دالة مميزة ϕ على A بحيث

$\phi(f) = 0$ $(f \in A)$. فان الدالة f تكون بدون معكوس في A .

البرهان

البرهان بالتناقض ، لنفرض أن الدالة f تمــــلك معـــكوس في A و أن $\phi(f) = 0$. فانه بفرض أن $f, g \in A$. فان

$$\phi(fg) = \phi(e)$$

$$= 1$$

فان

$$\phi(f)\,\phi(g) = 1$$

$0 = 1$ و هذا غير ممكن . $\square$

نظرية 8

نفرض أن لدينا جبر بناخ A بالوحــــــدة e. افرض أن $f \in A$. و لنفرض أن ϕ دالـــة مميزة على A فان

(i) $\phi(\phi(f)) = f$

(ii) $\phi((f - \phi(f)) \pm (g - \phi(g))) = 0$

(iii) $\phi((f - \phi(f))\,(g - \phi(g))) = 0.$

البرهان

(i) افرض أن $\lambda \in \mathbb{C}$. ضع λ = $\phi(f)$. فان

$$\phi(\phi(f)) = \phi(\lambda)$$
$$= \phi(\lambda e)$$
$$= e\phi(\lambda)$$
$$= e \cdot \lambda$$
$$= \lambda$$
$$= \phi(f).$$

لذلك

$$\phi(\phi(f)) = \phi(f)$$

برهان (ii) و (iii) ينتج من (i) . □

نظرية 9

نفرض أن لدينا جبر بناخ A بالوحدة e. و لنفرض أن ϕ دالة مميزة على A. فانه لا يمكن إيجاد $x, y \in A$ بحيث تكون $x + xy = y$ و = $\phi(x)$.□

النظرية التالية تشبه النظرية 9 ولكننا غيرنا بعض شروطها .

نظرية 10

نفـرض أن لديـنا جبر بناخ A بالوحدة e. و لنفرض أن ϕ دالة مميزة على A. فانه لا يمكن إيجاد $x, y \in A$ بحيث تكون $x - xy = y$

و $1 = (x)\phi$. فان:

$$\phi(y) = \frac{1}{2}.$$

البرهان

نفرض أن $x, y \in A$. فان

$$1 - \phi(y) = \phi(x) - \phi(x)\,\phi(y)$$
$$= \phi(x - xy)$$
$$= \phi(y)\,.$$

لهذا

$$1 - \phi(y) = \phi(y)\,.$$

لذلك

$$\phi(y) = \frac{1}{2}.$$

تعريف 11

نفـــرض أن لديـــنا جبر بناخ A بالوحدة e. و لنفرض أن ϕ دالة مميزة على A. فان **النواة** للدالة ϕ ورمزها $\ker(\phi)$ تعرف كالآتي:

$$\ker(\phi) = \{\, a \in A : \phi(a) = 0 \,\}\,.$$

نظرية 12

نفرض أن لدينا جبر بناخ A بالوحدة e. و لنفرض أن ϕ دالة مميزة على A. فان

(i) $x \in \ker(\phi) \Rightarrow x'' \in \ker(\phi)$

(ii) $x \in \ker(\phi) \Rightarrow \dfrac{1}{1+\phi(x)} = 1.$

البرهان

(i) بفرض أن $x \in \ker(\phi)$. فان $\phi(x) = 0$

ولان

$$\phi(x'') = \phi(x)''$$

فنستنتج أن

$$\phi(x'') = 0$$

لذلك

$$x'' \in \ker(\phi)$$

(ii) نفرض أن $x \in \ker(\phi)$.. فان

$$\phi(x) = 0$$

لهذا

$$\frac{1}{1+\phi(x)} = \frac{1}{1+0}.$$

لذلك

$$\frac{1}{1+\phi(x)} = 1 \;.\; \square$$

ملاحظة

حظ أن ، من الشرط (ii) في النظرية 12 نستنتج الحقيقة التالية :

إذا كانت $x \in \ker(\phi)$ ، فان $\frac{1}{1+\phi(x'')}=1$.

نظرية 12

نفرض أن لدينا جبر بناخ A بالوحدة e. و لنفرض أن ϕ دالة مميزة على A. فان:

$$\text{(i)}\quad a-\frac{\phi(a)}{\phi(b)}x\in\ker(\phi)\quad (a\in A, x\in A\setminus\ker(\phi))$$

$$\text{(ii)}\quad \phi(ah)=0\quad (a\in A, y\in\ker(\phi)).$$

تعريف 13

نفرض أن لدينا جبر بناخ A بالوحدة e. و لنفرض أن ϕ دالة مميزة على A.

فان **دالة نقطة الانحراف** عند ϕ هي دالة خطية D على A بحيث أن:

$$D(ab)=\phi(a)D(b)+\phi(b)D(a)\quad (a, b\in \mathrm{A}).$$

إذا كانت $D=0$ ، فان D تسمى **دالة نقطة انحراف صفرية** .

فمثلا ، نفرض أن $C^1[0,1]$ يكون جبر بناخ كما سبق . و لنعرف الدالة D على $C^1[0,1]$ كالآتي:

$$D(f)=f'(x)\quad (f\in C^1[0,1]).$$

و الدالة المميزة ϕ المعرفة على $C^1[0,1]$ تعطى كا تي

$$\phi(f) = f(x).$$

إذاً ، D تكون دالة نقطة انحراف .

في الجزء التالي سوف نورد نصوص للخصائص الأساسية لدوال ا نحراف.

نظرية 14

نفرض أن لدينا جبر بناخ A بالوحدة e. و لنفرض أن D دالة نق انحراف على A ، فان:

$$\text{(i)} \quad D(e) = 0$$

$$\text{(ii)} \quad D(\lambda) = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

$$\text{(iii)} \quad \text{if } D = 0, \textit{ then } D^n = 0 \quad (n > 0).$$

ملاحظة

بالفقرة (i) من النظرية 16 ، نجد أن:

$$D(e^2 - e) = 0.$$

نظرية 15

نفرض أن لدينا جبر بناخ A بالوحدة e. و لنفرض أن ϕ دالة مميزة على A . و بفرض أن $a \in A$ فان :

$$D(a^2) = 2\,\phi(a)\,D(a).$$

البرهان

لنفرض أن $a \in A$. فان

$$\begin{aligned} D(a^2) &= D(a \,.\, a) \\ &= \phi(a)\,D(a) + \phi(a)\,D(a) \end{aligned}$$

$$= 2\,\phi(a)\,D(a).$$

لذلك

$$D(a^2) = 2\,\phi(a)\,D(a).$$

نظرية 16

نفرض أن لدينا جبر بناخ A بالوحدة e. و لنفرض أن D دالة نقطية انحراف على A. إذا كان $f \in A$، فان

(i) $D(D(f)) = 0$

(ii) $D(f - D(f)) = D(f)$

(iii) $D\big((f - \phi(f))(g - \phi(g))\big) = 0,$

حيث ϕ دالة مميزة على A.

البرهان

(i) افرض أن $f \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$. ضع $\lambda = D(f)$

فان $\lambda = D(D(f))$

$= 0$ (بالنظرية 14 (ii))

لذلك $0 = D(D(f))$

(ii) افرض أن $f \in A$. فان

$$D(f - \phi(f)) = D(f) - D(D(f))$$
$$= D(f) - 0$$
$$= D(f).$$

أذن

$$D(f - D(f)) = D(f).$$

(iii) $D((f-\phi(f))(g-\phi(g))) = \phi(f-\phi(f))\,D(g-\phi(g)) +$

$$\phi(g-\phi(g))\,D(f-\phi(f)) \; .$$

وإن $\phi(f-\phi(f)) = 0$ و $\phi(g-\phi(g)) = 0$ نستنتج أن

$$D((f-\phi(f))(g-\phi(g)) = 0 \; .$$

نظرية 17

نفرض أن لدينا جبر بناخ A بالوحدة e. و لنفرض أن D دالة نقطة انحراف على A . إذا كانت $f, g \in A$. فان

$$D((f - D(f)) + (g - D(g)) = D(f) + D(g)$$

أيضا

$$D((f - D(f)) - (g - D(g))) = D(f) - D(g) \; .$$

نظرية 18 [1]

نفرض أن لدينا جبر بناخ A بالوحدة e. إذا كانت D دالة نقطة انحراف على A و كانت $D \neq 0$ فاذ توجد دالة مميزة وحيدة ϕ على A .

نظرية 19 [1]

نفرض أن لدينا جبر بناخ A بالوحدة e. و لنفرض أن ϕ دالة مميزة على A و D هي دالة نقطة انحراف على A. فان $\phi o D$ تكون أيضا دالة نقطة انحراف على A .

البرهان

نفرض أن $f,g \in A$. فان

$$\begin{aligned}(D\circ\phi)(fg) &= D(\phi(fg))\\ &= D(\phi(f)\,\phi(g)) = \\ &= \phi(\phi(f))D(\phi(g)) + \phi(\phi(g))D(\phi(f)) = \\ &= \phi(f)\,D(\phi(g)) + \phi(g)\,D(\phi(f)) = \\ &= \phi(f)\,(D\circ\phi)(g) + \phi(g)\,(D\circ\phi)(f) =\end{aligned}$$

لذلك فان $D\circ\phi$ تكون دالة نقطة انحراف . ||

نظرية20 [1]

نفرض أن لدينا جبر بناخ A بالوحدة e . و لنفرض أن ϕ دالة مميزة على A بحيث كانت $(a\in A)$ $\phi(a)=a$. إذا كانت D هي دالة نقطة انحراف على A فان :

$D(a^n) = n\,a^{n-1}\,D(a)\ \ (n \geq 1)$. ||

نظرية 21 [1]

نفرض أن لدينا جبر بناخ A بالوحدة e . و لنفرض أن ϕ دالة مميزة على A بحيث كانت $(a\in A)$ $\phi(a)=a$. إذا كانت D هي دالة نقطة انحراف على A وكانت $D^0 = 1$ ، فان:

$$D^n(ab) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \left(D^{n-r}(a)\right)\left(D^r(b)\right)\ \ (n \in \mathbb{N})\ .\ ||$$

المراجــع

[1] F. F .Bonsall and J. Duncan, *complete normed algebra*, Springer-Verlag . New York, 1973.

[2] A. Browder, *Introduction to function algebra*, W. A. Benjamin, New York 1969.

[3] T. W. Gamelin, *uniform algebra*, Chelsea Publishing Company, New York 1984.