

# مجلة التربوي

مجلة علمية محكمة تصدر عن

كلية التربية الخمس

جامعة المرقب

العدد العاشر

يناير 2017م

## هيئة التحرير

### رئيس هيئة التحرير

د/ صالح حسين الأخضر

### أعضاء هيئة التحرير

د . ميلود عمار النفر

د . عبد الله محمد الجعفي

د . مفتاح محمد الشكري

د . خالد محمد التركي

استشارات فنية وتصميم الغلاف: أ. حسين ميلاد أبو شعالة

المجلة ترحب بما يرد عليها من أبحاث وعلى استعداد لنشرها بعد التحكيم .  
المجلة تحترم كل الاحترام آراء المحكمين وتعمل بمقتضاها .  
كافة الآراء والأفكار المنشورة تعبر عن آراء أصحابها ولا تتحمل المجلة تبعاتها .  
يتحمل الباحث مسؤولية الأمانة العلمية وهو المسؤول عما ينشر له .  
البحوث المقدمة للنشر لا ترد لأصحابها نشرت أو لم تنشر .  
حقوق الطبع محفوظة للكلية .

بحوث العدد

- الحركات أبعاد حروف المد واللين .
- التفكير الإيجابي في ضوء بعض المتغيرات الديمغرافية (لدى عينة من الشباب الليبيين)
- أثر التلوث البصري في التأثير على جمالية المدينة "مدينة زيتن كنموذج".
- الاحتجاج بالحديث الضعيف.
- مفهوم الخيال عند سارتر.
- الأحكامُ النَّحْوِيَّةُ الْمُتَعَلِّقَةُ بِالْمَوْصُولَاتِ الْحَرْفِيَّةِ.
- القيم الدلالية للفصل والاعتراض.
- الأبعاد الاجتماعية والثقافية لتنمية ثقافة الحوار في التعليم الجامعي الليبي دراسة ميدانية "جامعة مصراتة أنموذجاً".
- العوامل الخمس الكبرى للشخصية وعلاقتها بجنوح الأحداث.
- تقدير الجريان السطحي بحوض وادي جبرون باستخدام نظم المعلومات الجغرافية وتقنيات الاستشعار عن بعد.
- جهود المجامع اللغوية العربية في وضع المصطلحات العلمية.
- استخدام تقنية نظم المعلومات الجغرافية في تحديث الخرائط الورقية (الخرائط الجيولوجية كنموذج).
- ظاهرة القلب الصوتية بين القدامى والمحدثين.
- القول المهم في اعتراض الحصكفي على تعريف ابن هشام للجملّة والكلام وأيهما أعم .
- حوادث المرور في ليبيا والأضرار الناجمة عنها.

- Fuzzy Complex Valued Metric Spaces
- Academic Difficulties In Learning Among Undergraduates In Universiti Sains Islam Malaysia.
- Some Applications Of A Linear Operator To A Certain Subclasses Of Analytic Functions With Negative Coefficients.



### الافتتاحية

إن الفرد الناجح في حياته، وكذلك المجتمعات والدول هم الذين يحددون أهدافهم، ويضعون في حساباتهم تحقيقها، والوصول إليها، فإذا حدد الفرد والمجتمع لنفسه هدفا فلن يضيع في متاهات الحياة، وسوف يصل إلى المطلوب، فتحديد الهدف أمر مهم ومقوم من مقومات النجاح، لذا على الآباء والمربين، أن يعلموا الأبناء- ومنذ السنوات الأولى في دراستهم- أن يحددوا لأنفسهم أهدافا ينبغي عليهم الاجتهاد من أجل الوصول إليها وتحقيقها، كما يجب أن يعلموهم معايير الأهداف حتى تتوافق مع رغباتهم وقدراتهم.

وعلى المجتمع كله والدول في عالمنا العربي أن يضعوا أهدافا واضحة المعالم للنهوض بالمجتمع يعرفها الصغير قبل الكبير، والجاهل قبل المتعلم، فيسعى الجميع وتتضافر الجهود من أجل تحقيقها وتنفيذها، لا أن تكون طوباوية لا يشعر بها الأفراد، ولا يحسون بقيمتها، فلا يسعون ولا يتعاونون لتحقيقها، بل نجدهم في بعض الأحيان يعملون عكسها لعدم درايتهم بها.

ونتيجة لعدم وجود الأهداف الواضحة المعالم في مجتمعاتنا أفرادا وجماعات لم يصل الفرد منا- عقليا وفكريا واجتماعيا واقتصاديا- إلى مستوى المسؤولية؛ ولم تصل مجتمعاتنا إلى أولى درجات الرقي، فالملاحظ على شبابنا الإهمال والتسيب واللامباة نحو نفسه ونحو مجتمعه، فيقبل بأدنى المراتب ولم يعد في أنظارهم إلا أمرين: المال وبأي وجه كان، والمنصب المرموق دون السعي إلى مؤهلاته، فضعفت لديهم العزيمة، وخارت القوى، ووقع الكثير في سفاسف الأمور.

وفي المقابل نجد أن شبابا كانت أهدافهم واضحة، ومقاصدهم معروفة ارتقوا بفضل ذلك إلى مقامات مرموقة، ووصلوا إلى ما يطمحون إليه، مع شيء التشجيع والمتابعة، فمن سار الطريق وصل.

هيئة التحرير

Some Applications Of A Linear Operator To A Certain Subclasses Of Analytic Functions With Negative Coefficients  
العدد 10

Aisha Ahmed Amer

Rabeaa Abd Allah Alshbear

Mathematics Department, Faculty of Science  
Al-Khomus, Al-Margib University

and Nagat Muftah Alabbar  
Mathematics Department, Faculty of Education  
of Benghazi, University of Benghazi

**Abstract:**

The main object of this paper is to introduce and study the new subclasses  $TS_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda,l,a,c)$  and  $TR_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda,l,a,c)$  of analytic functions with negative coefficients defined by a linear operator . Coefficients inequalities for functions belonging to these subclasses are determined. In addition, radii of close-to-convexity, starlikeness and convexity, closure theorems are obtained.

**1. Introduction**

Let  $A(n)$  denote the class of all analytic functions in the open unit disc

$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , of the form:

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k, (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1)$$

Denote  $T(n)$  the subclass of  $A(n)$  consisting of functions of the form:

$$f(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k, (a_k \geq 0, n \in \mathbb{N}). \quad (2)$$

Some Applications Of A Linear Operator To A Certain Subclasses Of Analytic Functions With Negative Coefficients  
العدد 10

For functions  $f \in A(n)$  given by (1) and  $g \in A(n)$  given by

$$g(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k z^k,$$

we define the Hadamard product (or convolution) of  $f$  and  $g$  by

$$(f * g)(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k z^k.$$

If  $f, g$  are analytic in  $U$ , we say that  $f$  is subordinate to  $g$ , denoted by  $f \prec g$ , if there exists a function  $w$  analytic in  $U$  with  $w(0) = 0$  and  $|w(z)| < 1$  ( $z \in U$ ), such that  $f(z) = g(w(z))$ , ( $z \in U$ ). It is known that

$f(z) \prec g(z)$  ( $z \in U$ )  $\Rightarrow f(0) = g(0)$  and  $f(U) \subset g(U)$ .

Let the function  $\varphi(a, c; z)$  be given by

$$\varphi(a, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} z^{k+1}, \quad (z \in U, c \neq 0, -1, -2, -3, \dots),$$

where  $(x)_k$  denotes the Pochhammer symbol (or the shifted factorial).

Corresponding to the function  $\varphi(a, c; z)$ , Carlson and Shaffer [14] introduced a linear operator  $L(a, c)$  by

$$L(a, c)f(z) := \varphi(a, c; z) * f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} a_k z^{k+1}.$$

Note that:

$L(a, a)$  is the identity operator, and  $L(a, c) = L(a, b)L(b, c)$  ( $b, c \neq 0, -1, \dots$ ).

The author [1, 3] has recently introduced a new linear operator  $D_l^{m, \lambda}(a, b)f(z)$  as the following:

Some Applications Of A Linear Operator To A Certain Subclasses Of Analytic Functions With Negative Coefficients  
العدد 10

**Definition 1.1** Let

$$\phi_l^{m,\lambda}(a,b;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda k}{1+l}\right)^m \frac{(a)_k}{(b)_k} z^{k+1},$$

where  $(z \in U, b \neq 0, -1, -2, -3, \dots), \lambda \geq 0, m \in \mathbb{Z}, l \geq 0$ , and  $(x)_k$  is the Pochhammer symbol.

We defines a linear operator  $D_l^{m,\lambda}(a,b):A \rightarrow A$  by the following Hadamard product:

$$D_l^{m,\lambda}(a,b)f(z) := \phi_l^{m,\lambda}(a,b;z) * f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda k}{1+l}\right)^m \frac{(a)_k}{(b)_k} a_k z^{k+1}. \tag{3}$$

Note that:

$$D_0^{0,\lambda}(a,b)f(z) = L(a,b)f(z),$$

$$(1+l)D_l^{m,\lambda}(a,b)f(z) = (1-\lambda+l)L(a,b)f(z) + \lambda z(L(a,b)f(z))' = D_\lambda(L(a,b)f(z)), \lambda \geq 0,$$

$$D_l^{m,\lambda}(a,b)f(z) = D_\lambda(D_l^{m-1,\lambda}(a,b)f(z)), \text{ where } m \in \mathbb{Z}.$$

Special cases of this operator includes:

- $D_0^{m,0}(a,b)f(z) = D_l^{0,\lambda}(a,b)f(z) = L(a,b)f(z)$ .
- the Ruscheweyh derivative operator [10] in the cases:  
 $D_0^{0,0}(\beta+1,1)f(z) = D^\beta f(z); \beta \geq -1$ .
- the Salagean derivative operator [12]:  $D_0^{m,1}(1,1)f(z)$ .
- the generalized Salagean derivative operator introduced by Al-Oboudi [11]:  $D_0^{m,\lambda}(1,1)f(z)$ .
- the Catas drivative operator [17]:  $D_l^{m,\lambda}(1,1)f(z)$ , and finally.
- The fractional operator introduced by Owa and Srivastava [18]



Some Applications Of A Linear Operator To A Certain Subclasses Of Analytic Functions With Negative Coefficients  
العدد 10

$$D_0^{0,0}(2, 2 - \gamma)f(z) = \Omega^\gamma f(z) = \Gamma(2 - \gamma)z^\gamma D_z^\gamma f(z);$$

$D_z^\gamma f(z)$  is the fractional derivative of  $f$  of order  $\gamma; \gamma \neq 2, 3, 4, \dots$ .

Now, we introduce new subclasses of analytic functions involving our operator  $D_l^{m,\lambda}(a,b)$ .

**Definition 1.2** A function  $f \in T(n)$  is said to be in the subclass  $TS_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda, l, a, c)$ , for  $(0 < \beta \leq 1, \gamma \in \mathbb{C} / \{0\})$  if and only if:

$$\left| \frac{1}{\gamma} \left( \frac{zv'}{v} - 1 \right) \right| < \beta,$$

where

$$\frac{zv'}{v} = \frac{z(D_l^{m,\lambda}(a,b))' + \delta z^2(D_l^{m,\lambda}(a,b)f(z))''}{(1-\delta)D_l^{m,\lambda}(a,b)f(z) + \delta z(D_l^{m,\lambda}(a,b)f(z))'}, \tag{5}$$

$(z \in U, 0 \leq \delta \leq 1)$ .

**Definition 1.3** A function  $f \in T(n)$  is said to be in the subclass  $TR_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda, l, a, c)$  if and only if

$$\left| \frac{1}{\gamma} (v' - 1) \right| < \beta,$$

$(z \in U, 0 \leq \delta \leq 1, 0 < \beta \leq 1, \gamma \in \mathbb{C} / \{0\})$ .

We note that there are some known subclasses of  $TS_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda, l, a, c)$  and  $TR_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda, l, a, c)$

**Remark 1.1** (1) If  $m = 0$ , and  $a = c = 0$  then

$$TS_{\beta,\gamma}^{0,\delta}(\lambda, l, 0, 0) = S_n(\beta, \gamma, \delta).$$

(2) If  $m = 0$ , and  $a = c = 0$  then

$$TR_{\beta,\gamma}^{0,\delta}(\lambda, l, 0, 0) = R_n(\beta, \gamma, \delta).$$

Some Applications Of A Linear Operator To A Certain Subclasses Of Analytic Functions With Negative Coefficients  
العدد 10

The classes  $S_n(\beta, \gamma, \delta)$  and  $R_n(\beta, \gamma, \delta)$  were investigated in [5].

(3) If  $m = 0$ ,  $a = c = 0$  and  $\delta = 0$ ,  $\beta = |b|$ ,  $\gamma = 1$  then

$$TS_{|b|,1}^{0,0}(0, l, \lambda, c) = S_1^*(b),$$

where  $(b \in \mathbb{C} / \{0\})$ . The class  $S_1^*(b)$  was studied in [6].

**2. Coefficient bounds**

In this section, we obtain necessary and sufficient conditions for a function to be in the subclasses  $TS_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda, l, a, c)$  and  $TR_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda, l, a, c)$  respectively.

**Theorem 2.1** *Let the function  $f$  be defined by (3). Then  $f$  belongs to the subclass  $TS_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda, l, a, c)$  if and only if*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} [1 + \delta(k-1)](k + \beta|\gamma| - 1) \left| \left( \frac{\lambda(k-1) + 1 + l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} a_k \right| \leq \beta|\gamma|,$$

$(z \in \mathbb{U}, 0 \leq \delta \leq 1, 0 < \beta \leq 1, \gamma \in \mathbb{C} / \{0\})$ .

**Proof:** Suppose  $f \in TS_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda, l, a, c)$ . By making use of (4) we easily obtain

$$Re \left\{ \frac{zv'}{v} - 1 \right\} > -\beta|\gamma| \quad (z \in \mathbb{U}),$$

which, in view of (5), gives :

$$Re \left\{ \frac{-\sum_{k=n+1}^{\infty} [1 + \delta(k-1)](k-1) \left( \frac{\lambda(k-1) + 1 + l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} a_k z^{k-1}}{\sum_{k=n+1}^{\infty} [1 + \delta(k-1)] \left( \frac{\lambda(k-1) + 1 + l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} a_k z^{k-1}} \right\} > -\beta|\gamma|.$$

(8)

Some Applications Of A Linear Operator To A Certain Subclasses Of Analytic Functions With Negative Coefficients  
العدد 10

Setting  $z = r$  ( $0 \leq r < 1$ ) in ( 8 ) we observe that the expression in the denominator on the left hand side of ( 8 ) is positive for  $r = 0$  and also for all  $r \in (0,1)$ . Thus by letting  $r \rightarrow 1^-$  through real values ( 8 ) leads us to the desired condition ( 7 ) of the theorem.

Conversely, by applying the hypothesis ( 8 ) and setting  $|z| = 1$ , we find by using (7)that

$$\begin{aligned} \left| \frac{zv'}{v} - 1 \right| &= \left| \frac{- \sum_{k=n+1}^{\infty} [1 + \delta(k-1)](k-1) \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} a_k z^k}{z - \sum_{k=n+1}^{\infty} [1 + \delta(k-1)] \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} a_k z^k} \right| \\ &\leq \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} [1 + \delta(k-1)](k-1) \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} a_k z^{k-1}}{1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} [1 + \delta(k-1)] \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} a_k z^{k-1}} \\ &\leq \frac{\beta |\gamma| \left( 1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} [1 + \delta(k-1)] \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} a_k \right)}{1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} [1 + \delta(k-1)] \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} a_k} \\ &= \beta |\gamma|. \end{aligned}$$

Hence, by the maximum modulus principle, we have  $f \in TS_{\beta, \gamma}^{m, \delta}(\lambda, l, a, c)$ .

Some Applications Of A Linear Operator To A Certain Subclasses Of Analytic Functions With Negative Coefficients  
العدد 10

**Corollary 2.1** Let the function  $f$  be defined by (3) and  $f \in TR_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda, l, a, c)$ , then

$$a_k \leq \frac{\beta|\gamma|}{[1+\delta(k-1)](k+\beta|\gamma|-1) \left| \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right|}, \quad (k \geq n+1), \tag{9}$$

with equality only for functions of the form

$$f_z = z - \frac{\beta|\gamma|}{[1+\delta(k-1)](k+\beta|\gamma|-1) \left| \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right|} z^k, \quad (k \geq n+1).$$

By using the same arguments as in the proof of Theorem 2.1 we can establish the next theorem.

**Theorem 2.2** Let the function  $f$  be defined by (3). Then  $f$  belongs to the subclass  $TR_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda, l, a, c)$  if and only if

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k [1+\delta(k-1)] \left| \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right| a_k \leq \beta|\gamma|, \tag{10}$$

( $z \in U, 0 \leq \delta \leq 1, 0 < \beta \leq 1, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ).

**Corollary 2.2** Let function  $f$  be defined by (3) and  $f \in TR_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda, l, a, c)$ . Then

$$a_k \leq \frac{\beta|\gamma|}{k [1+\delta(k-1)] \left| \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right|} \quad (k \geq n+1), \tag{11}$$

with equality only for functions of the form

$$f_z = z - \frac{\beta |\gamma|}{[1 + \delta(k-1)] \left| \left( \frac{\lambda(k-1) + 1 + l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right|} z^k, \quad (k \geq n+1).$$

### 3. Radius of starlikeness and convexity

We concentrate upon getting the radius of close-to-convexity, starlikeness and convexity.

**Theorem 3.1** *Let the function  $f$  be defined by (3), belongs to the subclass  $f \in TS_{\beta, \gamma}^{m, \delta}(\lambda, \alpha, a, c)$ , then  $f$  is close-to-convex of order  $\mu$ , ( $0 \leq \mu < 1$ ) in the disc  $|z| < r_1$ , where*

$$r_1 := \inf_{k \geq n+1} \left( \frac{(1-\mu)[1 + \delta(k-1)](k + \beta |\gamma| - 1)}{k \beta |\gamma|} \left| \left( \frac{\lambda(k-1) + 1 + l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right| \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (12)$$

**Proof:** It is suffices to prove that  $|f'(z) - 1| < 1 - \mu$ , ( $0 \leq \mu < 1$ ) for  $z \in U$  such that  $|z| < r_1$ ,

$$|f'(z) - 1| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k |z|^{k-1}.$$

Thus  $|f'(z) - 1| \leq 1 - \mu$ , if

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{1-\mu} a_k |z|^{k-1} \leq 1.$$

By making use of (7) we obtain

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[1 + \delta(k-1)](k + \beta |\gamma| - 1)}{k \beta |\gamma|} \left| \left( \frac{\lambda(k-1) + 1 + l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right| \leq 1.$$

Then the inequality (13) will be true if

$$\frac{k}{1-\mu} a_k |z|^{k-1} \leq \frac{[1 + \delta(k-1)](k + \beta |\gamma| - 1)}{k \beta |\gamma|} \left| \left( \frac{\lambda(k-1) + 1 + l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right|.$$

Some Applications Of A Linear Operator To A Certain Subclasses Of Analytic Functions With Negative Coefficients  
العدد 10

Thus

$$|z| := \inf_{k \geq n+1} \left( \frac{(1-\mu)[1+\delta(k-1)](k+\beta|\gamma|-1)}{k\beta|\gamma|} \left| \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right| \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

This completes the proof.

**Theorem 3.2**

Let the function  $f$  be defined by (3) belongs to the subclass  $f \in TS_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda,l,a,c)$ . Then  $f$  is starlike of order  $\mu$ , ( $0 \leq \mu < 1$ ) in the disc  $|z| < r_2$ , that is,

$$r_2 := \inf_{k \geq n+1} \left( \frac{(1-\mu)[1+\delta(k-1)](k+\beta|\gamma|-1)}{(k-\mu)\beta|\gamma|} \left| \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right| \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

**Proof:**

It is suffices to show that  $\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1 - \mu$ , ( $0 \leq \mu < 1$ ) for ( $z \in U$ ) such that  $|z| < r_2$ , we have

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| = \left| \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} (k-1)a_k z^{k-1}}{1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-1}} \right| \leq \frac{\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)a_k |z|^{k-1}}{1 - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k |z|^{k-1}}.$$

Thus  $\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq 1 - \mu$ , if

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k-\mu}{1-\mu} a_k |z|^{k-1} \leq 1.$$

In virtue of (7) we have

Some Applications Of A Linear Operator To A Certain Subclasses Of Analytic Functions With Negative Coefficients  
العدد 10

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[1+\delta(k-1)](k+\beta|\gamma|-1)}{k\beta|\gamma|} \left| \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right| \leq 1.$$

Then the inequality (14) will be true if

$$\frac{k-\mu}{1-\mu} a_k |z|^{k-1} \leq \frac{[1+\delta(k-1)](k+\beta|\gamma|-1)}{k\beta|\gamma|} \left| \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right|.$$

Thus

$$|z| := \inf_{k \geq n+1} \left( \frac{(1-\mu)[1+\delta(k-1)](k+\beta|\gamma|-1)}{(k-\mu)\beta|\gamma|} \left| \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right| \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

This completes the proof.

**Corollary 3.1** Let the function  $f$  be defined by (3) belongs to the subclass  $f \in TS_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda, l, a, c)$ . Then  $f$  is convex of order  $\mu$ , ( $0 \leq \mu < 1$ ) in the disc  $|z| < r_3$ , that is,

$$r_3 := \inf_{k \geq n+1} \left( \frac{(1-\mu)[1+\delta(k-1)](k+\beta|\gamma|-1)}{k(k-\mu)\beta|\gamma|} \left| \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right| \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

By using the same arguments as in the proofs of Theorems 3.1 and 3.2 we can obtain the radii of close-to-convexity, starlikeness and convexity for the subclass  $f \in TR_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda, l, a, c)$ .

**Theorem 3.3** Let the function  $f$  be defined by (3), belongs to the subclass  $f \in TR_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda, l, a, c)$ , then  $f$  is close-to-convex of order  $\mu$ , ( $0 \leq \mu < 1$ ) in the disc  $|z| < \rho_1$ , where

$$\rho_1 := \inf_{k \geq n+1} \left( \frac{(1-\mu)[1+\delta(k-1)]}{\beta|\gamma|} \left| \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right| \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Some Applications Of A Linear Operator To A Certain Subclasses Of Analytic Functions With Negative Coefficients  
العدد 10

**Theorem 3.4** Let the function  $f$  be defined by (3) belongs to the subclass  $f \in TR_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda,l,a,c)$ . Then  $f$  is starlike of order  $\mu$ , ( $0 \leq \mu < 1$ ) in the disc  $|z| < \rho_2$ , that is,

$$\rho_2 := \inf_{k \geq n+1} \left( \frac{k(1-\mu)[1+\delta(k-1)](k+\beta)}{(k-\mu)\beta|\gamma|} \left| \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right| \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

**Corollary 3.2** Let the function  $f$  be defined by (3) belongs to the subclass  $f \in TR_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda,l,a,c)$ . Then  $f$  is convex of order  $\mu$ , ( $0 \leq \mu < 1$ ) in the disc  $|z| < \rho_3$ , that is,

$$\rho_3 := \inf_{k \geq n+1} \left( k \frac{(1-\mu)[1+\delta(k-1)]}{(k-\mu)\beta|\gamma|} \left| \left( \frac{\lambda(k-1)+1+l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \right| \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

**4. Closure Theorems**

Let the function  $f_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, p$ ) defined by

$$f_j(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{k,j} z^k, (z \in U).$$

We obtain the following results for the closure of functions in the subclasses  $TS_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda,l,a,c)$  and  $TR_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda,l,a,c)$ .

**Theorem 4.1** Let the function  $f_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, p$ ) be defined by (16) belongs to the subclass  $f \in TR_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda,l,a,c)$ , and let  $c_j \geq 0, (j = 1, 2, 3, \dots, p)$  such that  $\sum_{j=1}^p c_j = 1$ . Then the function  $h$  defined by

$$h = \sum_{j=1}^p c_j f_j,$$

is also in the subclass  $TS_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda,l,a,c)$ .



Some Applications Of A Linear Operator To A Certain Subclasses Of Analytic Functions With Negative Coefficients  
العدد 10

**Proof:** In virtue of the definition of  $h$ , we can write

$$\begin{aligned} h &= \sum_{j=1}^p c_j \left( z - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{k,j} z^k \right) \\ &= \left( \sum_{j=1}^p c_j \right) z - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^p c_j a_{k,j} \right) z^k \\ &= z - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^p c_j a_{k,j} \right) z^k. \end{aligned}$$

Since the functions  $f_j$  are in  $TS_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda, l, a, c)$ , for every  $j = 1, 2, 3, \dots, p$ , we have

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} [1 + \delta(k-1)](k + \beta|\gamma| - 1) \left| \left( \frac{\lambda(k-1) + 1 + l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} a_{k,j} \right| \leq \beta|\gamma|.$$

Hence we get

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} [1 + \delta(k-1)](k + \beta|\gamma| - 1) \left| \left( \frac{\lambda(k-1) + 1 + l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} \left( \sum_{j=1}^p c_j a_{k,j} \right) \right| \leq \beta|\gamma|.$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p c_j \sum_{k=n+1}^{\infty} [1 + \delta(k-1)](k + \beta|\gamma| - 1) \left| \left( \frac{\lambda(k-1) + 1 + l}{1+l} \right)^m \frac{(a)_{k-1}}{(c)_{k-1}} a_{k,j} \right| \\ \leq \sum_{j=1}^p c_j (\beta|\gamma|) = \beta|\gamma|, \end{aligned}$$

which implies that  $h$  is in the subclass  $TS_{\beta,\gamma}^{m,\delta}(\lambda, l, a, c)$ .

Thus, the proof of the theorem is complete.

Many other work on analytic functions related to derivative operator and integral operator can be read in [2],[4] and [5].

**References**

- [1] Aisha Ahmed Amer and Maslina Darus, On a property of a subclass of Bazilevic functions , *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, to appear.
- [2] Aisha.A. Amer and M. Darus. Certain properties for analytic functions with negative coefficients defined by a generalised derivative operator, *Journal of Quality Measurement and Analysis*,(JQMA) 8 2012, 37-44. ISSN 1823-5670.
- [3] Aisha Ahmed Amer and Maslina Darus, A distortion theorem for a certain class of Bazilevic function , *Int. Journal of Math. Analysis*, **6** (2012),12, 591-597.
- [4] Aisha Ahmed Amer , Second Hankel Determinant for New Subclass Defined by a Linear Operator, Springer International Publishing Switzerland 2016, Chapter 6 .
- [5] Nagat.M.Mustafa, and maslina Darus,. The Fekete-Szego problem for starlike functions of order  $\alpha$  associated with generalised derivative operator. *AIP Conf. Proc.*(2012) 15(22): 938-944.
- [6] O.Altintas, O.Ozkan, H. M. Srivastava, Neighborhoods of a class of analytic functions with negative coefficients, *Applied Math. Letters*. **13**(2000), 63-67, .
- [7] A. Y. Lashin, Starlike and convex functions of complex order involving a certain linear operator, *Indian J. Pure and Appl.* **34**(7) (2003), 1101-1108, .
- [8] J. E. Littlewood, On inequalities in the theory of functions, *Proc. London Math. Soc.* **23** 481-519 (1925).
- [9] S. Owa and H. M. Srivastava, Some applications of the generalized Libera operator, *Proc. Japan Acad. Set. A Math. Sei.* **62** (1986), 125-128, .

Some Applications Of A Linear Operator To A Certain  
Subclasses Of Analytic Functions With Negative  
Coefficients  
العدد 10

- [10] T. M. Flett, The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* **38** (1972), 746-765.
- [11] St. Ruscheweyh , New criteria for univalent functions, *Proc. Amer. Math.Soc.* **49**, (1975), 109-115, .
- [12] F.M. Al-Oboudi, On univalent functions defined by a generalized Salagean Operator, *Int, J. Math. Math. Sci.* **27** (2004), 1429-1436 .
- [13] G. S. Salagean , Subclasses of univalent functions, *Lecture Notes in Math Springer-Verlag.* **1013** (1983), 362-372 .
- [14] M. Darus and K. Al-Shaqsi , Differential sandwich theorem with generalized derivative operator, *Int. J. Math. Sci.* **2(2)** (2008), 75-78.
- [15] B.C. Carlson, D.B. Shaffer, Starlike and prestarlike hypergeometric functions , *SIAM J. Math. Anal.* **15(4)** (1984), 737-745 .
- [16] H. M. Srivastava and S. Owa, An application of the fractional derivative, *Mathematica Japonica.* **29(3)**, (1984), 383-389 .
- [17] S. Owa, On the distortion theorems, *Kyungpook Math. J.* **18**, (1978), 53-59 .
- [18] Catas.A, On a Certain Differential Sandwich Theorem Associated with a New Generalized Derivative Operator. *General Mathematics*, **4**,2009,83-95.
- [19] Owa. S , Srivastava. H.M, Univalent and starlike generalized hypergeometric functions. *Can. J. Math*, **39**,1987, 1057-1077.



## الفهرس

الصفحة	اسم الباحث	عنوان البحث	ر.ت
5		الافتتاحية	1
6	أ. جبريل محمد عثمان	الحركات أبعاض حروف المد واللين	2
21	د/ميلاد عبد القادر محمد فنته	التفكير الإيجابي في ضوء بعض المتغيرات الديمغرافية (لدى عينة من الشباب اللبنيين)	3
60	أ/ فرج مصطفى الهدار	أثر التلوث البصري في التأثير على جمالية المدينة "مدينة زليتن كنموذج"	4
84	د/أحمد عبد السلام ابشيش	الاحتجاج بالحديث الضعيف	5
103	د. نور الدين سالم ارحومة قريبع	مفهوم الخيال عند سارتر	6
130	د. علي محمد بن ناجي	الأحكام النَّحْوِيَّةُ الْمُتَعَلِّقَةُ بِالْمَوْصُولَاتِ الْحَرْفِيَّةِ	7
174	د. عبدالله محمد الجعكي	القيم الدلالية للفصل والاعتراض	8
190	د. سليمة عمر علي التائب	الأبعاد الاجتماعية والثقافية لتنمية ثقافة الحوار في التعليم الجامعي الليبي دراسة ميدانية "جامعة مصراتة أنموذجاً"	9
211	د/أحمد علي الحويج	العوامل الخمس الكبرى للشخصية وعلاقتها بجنوح الأحداث	10
245	د. رجب فرج سالم اقنير	تقدير الجريان السطحي بحوض وادي جبرون باستخدام نظم المعلومات الجغرافية وتقنيات الاستشعار عن بعد	11

## مجلة التربوي

العدد 10

الفهرس

الصفحة	اسم الباحث	عنوان البحث	ر.ت
286	الطاهر عمران جبريل	جهود المجامع اللغوية العربية في وضع المصطلحات العلمية	12
318	د / على عياد الكبير	استخدام تقنية نظم المعلومات الجغرافية في تحديث الخرائط الورقية (الخرائط الجيولوجية كنموذج)	13
343	د/ عز الدين أحمد عبد العالي	ظاهرة القلب الصوتية بين القدامى والمحدثين	14
358	د. محمد سالم العابر	القول المهم في اعتراض الحصكفي على تعريف ابن هشام للجملة والكلام وأيهما أعم	15
383	د/ مفتاح ميلاد الهديف	حوادث المرور في ليبيا والأضرار الناجمة عنها	16
305	أ / فاطمة مصطفى امين أ/سعاد مفتاح عبد الرحمن	Fuzzy Complex Valued Metric Spaces	17
418	د. مفتاح محمد أبو جناح	Academic Difficulties In Learning Among Undergraduates In Universiti Sains Islam Malaysia	18
441	Aisha Ahmed Amer Rabeaa Abd Allah Alshbear Nagat Muftah Alabbar	Some Applications Of A Linear Operator To A Certain Subclasses Of Analytic Functions With Negative Coefficients.	19
455		الفهرس	20

- يشترط في البحوث العلمية المقدمة للنشر أن يراعى فيها ما يأتي :
- أصول البحث العلمي وقواعده .
  - ألا تكون المادة العلمية قد سبق نشرها أو كانت جزءا من رسالة علمية .
  - يرفق بالبحث المكتوب باللغة العربية بملخص باللغة الإنجليزية ، والبحث المكتوب بلغة أجنبية مرخصا باللغة العربية .
  - يرفق بالبحث تركية لغوية وفق أنموذج معد .
  - تعدل البحوث المقبولة وتصحح وفق ما يراه المحكمون .
  - التزام الباحث بالضوابط التي وضعتها المجلة من عدد الصفحات ، ونوع الخط ورقمه ، والفترات الزمنية الممنوحة للعديل ، وما يستجد من ضوابط تضعها المجلة مستقبلا .

تنبيهات :

- للمجلة الحق في تعديل البحث أو طلب تعديله أو رفضه .
- يخضع البحث في النشر لأوليات المجلة وسياستها .
- البحوث المنشورة تعبر عن وجهة نظر أصحابها ، ولا تعبر عن وجهة نظر المجلة .

### **Information for authors**

- 1- Authors of the articles being accepted are required to respect the regulations and the rules of the scientific research.
- 2- The research articles or manuscripts should be original, and have not been published previously. Materials that are currently being considered by another journal, or is a part of scientific dissertation are requested not to be submitted.
- 3- The research article written in Arabic should be accompanied by a summary written in English. And the research article written in English should also be accompanied by a summary written in Arabic.
- 4- The research articles should be approved by a linguistic reviewer.
- 5- All research articles in the journal undergo rigorous peer review based on initial editor screening.
- 6- All authors are requested to follow the regulations of publication in the template paper prepared by the editorial board of the journal.

### **Attention**

- 1- The editor reserves the right to make any necessary changes in the papers, or request the author to do so, or reject the paper submitted.
- 2- The accepted research articles undergo to the policy of the editorial board regarding the priority of publication.
- 3- The published articles represent only the authors viewpoints.



